UNIONS OF CONVEX SETS IN METRIC SPACES

REUNIUNI DE MULȚIMI CONVEXE ÎN SPAȚII METRICE

Anatolie PRISĂCARU, dr.
e-mail: prisacaru@ase.md
Academia de Studii Economice din Moldova
MD-2005, Republica Moldova, Chişinău, str. Bănulescu Bodoni 61,
Tel.: (+373 22) 22 41 28, www.ase.md

Abstract. *In this article, necessary and sufficient conditions are given in which a set of a metric space is represented as a union of a finite number of convex sets.*
Key words: *metric, metric space, d-segment, convex set, convex hull, graph, k-partite graph.*

JEL CLASSIFICATION: C65 Miscellaneous Mathematical Tools

În această lucrare sunt expuse condiții necesare și suficiente în care o mulțime din spațiul metric (X, d) poate fi reprezentată ca reuniune a unui număr finit de mulțimi d-convexe.

Fie (X, d) un spațiu metric.

Definiţia 1.[Soltan V., 1994] Mulţimea $M \subset X$ se numeşte mulţime d-convexă (convexă în raport cu metrica d), dacă pentru orice doua puncte $x, y \in M$ d- segmentul se conţine în mulţimea M.

Definiţia 2. [Soltan V., 1994] Se numeşte învelitoare convexă a mulţimii $M \subset X$ cea mai mică după includere mulţime d-convexă din X ce conţine mulţimea M şi se notează cu $d - conv\ M$.

Pentru mulţimea $M \subset X$ vom defini operaţia: $P(M) = \cup\{\langle x, y\rangle : |x, y \in M\}$ şi vom nota: $P_0(M) = M, P_k(M) = P\big(P_{k-1}(M)\big),\ k = 1, 2, \dots$.

Teorema 1. Pentru orice mulţime M din spaţiul metric (X, d) au loc relaţiile $M = P_0(M) \subset P_1(M) \subset \cdots \subset P_0(M) \subset d - conv\ M = \cup_{k\geq 0} P_k(M)$.

Definiţia 3.[Prisăcaru A., 2012] Vom spune, că mulţimea $M \subset X$ satisface condiţia (A), dacă pentru orice submulţime de vârfuri $S \subseteq M$ cu $|S| = 3$ relaţia $P_1(S) \subseteq M$ implică $P_2(S) \subseteq M$.

Teorema 2. Pentru mulţimea $M \subset X$ următoarele condiţii sunt echivalente:

1) mulţimea M satisface condiţia (A),
2) pentru orice $S \subset M$ relaţia $P_1(S) \subset M$ implică $P_2(S) \subset M$,
3) pentru orice $S \subset M$ relaţia $P_1(S) \subset M$ implică $d - conv\ S \subset M$

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2)**.** Fie, că mulţimea M satisfice condiţia (A). Vom presupune, că $S \subset M$ și $P_1(S) \subset M$, iar $P_2(S) \not\subset M$. Dacă $P_2(S) \not\subset M$, atunci se vor găsi aşa două puncte x şi y din $P_1(S)$, pentru care d- segmentul $\langle x, y\rangle$ nu aparţine lui M. Din relaţia $x, y \in P_1(S) \subset M$ rezultă, că există aşa puncte $a, b, c, d \in S$ pentru care $x \in \langle a, b\rangle \subset M$ şi $y \in \langle c, d\rangle \subset M$. Să observăm, că $\langle a, c\rangle \cup \langle a, d\rangle \subset P_1(S) \subset M$. Deoarece are loc condiţia 1) a teoremei rezultă în particular că şi $\langle a, y\rangle \subset M$. Analog vom obţine că $P_2(b, c, d) \subset M$, deci şi $\langle y, b\rangle \subset M$.

Să cercetăm mulţimea $N = \{a, b, y\} \subset M$. Din cele demonstrate mai sus $P_1(N) \subset M$, dar aceasta implică $\langle x, y\rangle \subset P_2(N) \subset M$. Deci presupunerea iniţială a fost greşită. Aceasta demonstrează implicaţia 1) $\Rightarrow$ 2).

2) $\Rightarrow$ 3). Fie $S \subset M$ şi $P_1(S) \subset M$ implică $P_2(S) \subset M$ pentru orice $S \subset M$. Uşor de observat, că $P_1\big(P_1(S)\big) = P_2(S) \subset M$ (condiţia 2)). Deoarece $P_1(S) \subset M$, din 2) vom obţine, că $P_3(S) = P_2\big(P_1(S)\big) \subset M$. Presupunem, că $P_l(S) \subset M$ pentru orice $l \leq k$. Vom demonstra, că $P_{k+1}(S) \subset M$. Într-adevăr, $P_k(S) = P_1\big(P_{k-1}(S)\big) \subset M$ şi atunci ţinând cont că se îndeplineşte condiţia 2) va avea loc relaţia $P_{k+1}(S) = P_2\big(P_{k-1}(S)\big) \subset M$, astfel $P_l(S) \subset M$ pentru orice valoare a numărului natural l. Rezultă, că $d - conv\ S \subset M$.

3) $\Rightarrow$ 1) Din 3) trivial rezultă 1). Teorema este demonstrată.

Pentru mulțimea $M \subset X$ vom defini graful $G(M)$ vârfurile cărui sunt punctele mulțimii M, iar (x, y) este o muchie a grafului $G(M)$ dacă și numai dacă $d -$ segmentul $\langle x, y \rangle$ nu se include în mulțimea M.

Vom aminti, că graful $G = (X; U)$ se numește $k -$ partit, dacă vârfurile lui pot fi împărțite în k submulțimi disjuncte și fiecare muchie a grafului este adiacentă vârfurilor din submulțimi diferite.

Teorema 3. Mulțimea $M \subset X$ pentru care se satisface condiția (A) poate fi reprezentată ca o reuniune de k mulțimi d-convexe dacă și numai dacă graful $G(M)$ este $k -$ partit.

Demonstraţie:

Necesitatea. Dacă mulțimile $M_i, i = \overline{1, k}$ sunt d-convexe, atunci vârfurile grafului $G(M)$, ce corespund fiecărei mulțimi M_i nu sunt incidente două câte două, deci $G(M)$ este $k -$ partit.

Suficienţa. Fie, că mulțimea M satisface condiţia (A) și graful $G(M)$ este $k-$ partit. Atunci vărfurile grafului $G(M)$ pot fi împărțite în mulțimile $V_1, V_2, \dots, V_k$, că în fiecare submulțime V_i vârfurile nu sunt incidente două câte două. Din definiția grafului $G(M)$ rezultă, că are loc relația $P_1(V_i) \subset M, i = \overline{1, n}$. Din Teorema 2 rezultă, că și $d - convV_i \subset M, i = \overline{1, n}$, dar atunci $M = \bigcup_{i=1}^{k} V_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} d - convV_i$. Teorema este demonstrată.

Rezultatele obținute sunt adevărate și în cazul spațiului metric L, unde condiția (A) se înlocuiește cu (A^*), care denotă, că orice simplex de dimensiunea doi se include în mulțimea M dacă toate muchiile lui aparțin mulțimii M.

BIBLIOGRAFIE

1. Soltan V. Întroducere în teoria axiomatică a convexității, Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Chișinău, Știința, 1994.
2. Prisăcaru A. Acoperiri convexe ale submulţimilor de vârfuri din graf. Conferinţa Ştiinţifică Internaţională "Competitivitate şi inovare în economia cunoaşterii" (28-29 septembrie 2012), volumul II, Chişinău, 2012, p. 32-33.
3. McKinney R. L. On union of two convex sets. Canad. J. Math. 18 (1966), p. 883-886.
4. Topală O. Reuniuni finite ale mulțimilor *d*-convexe, *d*-stelate și L_n-stelate, Chișinău, Știința, 1985, p. 103-110