005.311.6

MODELE ȘI ALGORITMI DE ELABORARE A DECIZIILOR ÎN SITUAȚII DE INCERTITUDINE

Drd. Lilian GOLBAN, ASEM
golban.lilian@gmail.com
Conf. univ. dr. Anatol GODONOAGĂ, ASEM
anagodon22@yahoo.com

În acest studiu, sunt descrise trei modele decizionale pentru situațiile incerte, în care decidentul dispune de o infinitate de alternative, activitatea se determină de factori necontrolabili, iar numărul de stări ale naturii este considerat finit. Modelele matematice propuse posedă anumite grade de complexitate, reflectând, totodată, adecvat, aspectele decizionale în condiții de informare incompletă, nedeterministă etc. Concomitent, acestea constituie o viziune actuală pentru extinderea posibilităților clasice ale algoritmilor de optimizare a diferitelor procese economice de producție, de tip piață liberă sau monopoliste și transport (distribuție), pentru cazurile cu decizii continue în jocul cu natura. De altfel, se admite că comportamentul consumatorului este unul incert, iar cererea nu poate fi determinată a priori, cunoscând doar variantele posibile de realizare a acesteia.

Cuvinte-cheie: ***i****ncertitudine, decizii, criteriul Wald, criteriul Savage, gradient generalizat, algoritmi numerici.*

JEL: C02, C61.

Introducere

În general, procesul de luare a unei decizii presupune că decidentul se confruntă cu o situație decizională, în care trebuie să opteze pentru o singură decizie dintr-un anumit set. Acest proces este unul destul de dificil, în care, pentru obținerea rezultatelor dorite, decidentul trebuie să acționeze în modul următor: la realizarea favorabilă a factorilor necontrolabili externi și interni, procesul economic trebuie influențat astfel, încât pierderile să fie minime sau venitul – maximal. Însă, aceste situații sunt extrem de puține. De aceea, activitatea economică presupune că, în marea majoritate a cazurilor, decidenții trebuie să proiecteze deciziile, pornind de la condițiile reale, cele ale incertitudinii.

005.311.6

DECISION MAKING MODELS AND ALGORITHMS IN SITUATIONS OF UNCERTAINTY

PhD candidate Lilian GOLBAN, ASEM
golban.lilian@gmail.com
Assoc. Prof. PhD Anatol GODONOAGĂ, ASEM
anagodon22@yahoo.com

This study describes three decision making models for uncertain situations, when the decision maker has infinity of alternatives, the activity is determined by uncontrollable factors, and the number of states of nature is considered finite. The proposed mathematical models have certain degrees of complexity, while, also, adequately reflecting the decision-making aspects under insufficient, non-deterministic information conditions, etc. At the same time, they represent a current vision for extending the classical possibilities of the optimization algorithms of different economic processes of production, of free market or monopolistic type, and transport (distribution), for the cases with continuous decisions in the game with nature. Moreover, it is admitted that the consumer's behaviour is uncertain, and the demand cannot be determined a priori, knowing only the possible variants of its realization.

Keywords: *uncertainty, decisions, Wald criterion, Savage criterion, generalized gradient, numerical algorithms.*

JEL: C02, C61.

Introduction

Generally speaking, the decision-making process implies that the decision maker is facing with a decision-making situation, where he or she has to choose a single option from a particular set. This process is quite difficult and, in order to obtain the desired results, the decision maker must act in the following way: for the favourable realization of the external and internal uncontrollable factors, the economic process must be influenced so that the losses are minimum or the income – maximum. However, these situations are extremely rare. That is why the economic activity implies that, in the vast majority of cases, the decision makers have to design their decisions, based on the real conditions, those of the uncertainty.

Incertitudinea se asociază cu situațiile în care deciziile se proiectează și se adoptă în condiții de minimă informare cu privire la factorii necontrolabili și lipsa de informații privind realizarea concretă a stărilor naturii. Acești factori, la rândul lor, se supun „controlului” fie din partea naturii, care, uneori, este destul de loială față de decident, fie din partea unui grup conștient și care urmărește, preponderent, interese contradictorii în raport cu decidentul. Aceste situații survin, de regulă, în momentul în care nu se cunosc probabilitățile de realizare a factorilor necontrolabili, dar nici nu există oarecare mijloace pentru a le determina.

Metode de cercetare

Situațiile decizionale, în condiții incerte, deseori, se tratează în limbajul teoriei jocurilor, în care se confruntă doi jucători A (decidentul) și B (natura sau un grup conștient) și pentru fiecare pereche $(u,\omega)\in U\times\Omega$ jucătorului A îi corespunde o anumită funcție de utilitate $r(u,\omega)$. În termeni economici, indicatorul $r(u,\omega)$ poate exprima, în unități monetare, venitul sistemului economic dat sau costul suportat de acesta, care este controlat și condus pentru satisfacerea intereselor decidentului A. Fără a restrânge generalitatea, $r(u,\omega)$ se va interpreta ca o funcție-cost pentru A. Dacă a priori s-ar cunoaște starea concretă ω, atunci, e firesc să se ia decizia $u=u^*(\omega)\in U$, care minimizează funcția cost:

Uncertainty is associated with the situations when decisions are designed and taken under conditions of minimal information about the uncontrollable factors and the lack of information regarding the concrete realization of the states of nature. These factors, in their turn, are subject to the “control” either of nature, which is sometimes quite loyal to the decision maker, or of a conscious group that pursues, mainly, contradictory interests in relation to the decision maker. These situations usually occur when the probabilities of achieving the uncontrollable factors are not known, and there are no means to determine them.

Research methods

Decision-making situations under uncertain conditions are often dealt with in the language of game theory, when two players A (the decision maker) and B (the nature or a conscious group) confront, and for each pair $(u,\omega)\in U\times\Omega$, player A has a certain utility function $r(u,\omega)$. In economic terms, indicator $r(u,\omega)$ can express in monetary units, the income of the given economic system or the cost incurred by it, which is controlled and meant to satisfy the interests of the decision maker A. Without restricting the generality, $r(u,\omega)$ shall be interpreted as a cost-function for A. If the concrete state ω would be known *a priori*, then it is natural to take the decision $u=u^*(\omega)\in U$ which minimizes the cost function:

$$r(u^*(\omega),\omega)=\min_{u\in U}[r(u,\omega)]. \tag{1}$$

Incertitudinea se manifestă prin faptul că e dificil sau chiar imposibil de prezis varianta concretă, prin care s-ar produce factorul $\omega\in\Omega$, cu atât e mai dificil cazul în care decizia se cere să fie „aprobată” și pusă în acțiune înainte, sau mult prea înainte de momentul producerii variantei concrete ω. Dacă ambele mulțimi U și Ω sunt finite: $U=\{u_1,u_2,...u_m\}$, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...\omega_n\}$, atunci situația decizională se încadrează într-un joc matriceal, în care elementele matricei de plăți $r_{ij}=r(u_i,\omega_j)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Asemenea cazuri sunt amplu studiate în lucrările [1-4].

În continuare, se va admite că mulțimea deciziilor admisibile U este convexă și compactă în spațiul euclidian E^n, iar $r(u,\omega)$, pentru orice

Uncertainty is reflected by the fact that it is difficult or even impossible to predict the concrete variant when the factor $\omega\in\Omega$ can occur. It is even more difficult the case when the decision is required to be “approved” and put into action before, or too much before the moment the concrete variant ω was produced. If both sets U and Ω are finite: $U=\{u_1,u_2,...u_m\},\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...\omega_n\}$, then the decision situation becomes part of a matrix game, where the elements of the payment matrix $r_{ij}=r(u_i,\omega_j)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Such cases are extensively studied in the works [1-4].

Next, it will be admitted that the set of admissible decisions U is convex and compact in element fixat $\omega \in \Omega$, este o funcţie convexă şi continuă pe domeniul U. De aceea, prin analogie cu situaţiile în care U şi Ω sunt finite, ar fi firesc de analizat criteriile decizionale cunoscute şi pentru mulţimi U, care conţin o infinitate de elemente [5].

Criteriul Wald (criteriul pesimist). S-ar considera, într-o formulă mai potrivită, ca acest criteriu să fie numit de *supremă prudenţă*, deoarece nu e neapărat necesar ca decidentul, după firea sa, să fie pesimist. Aplicând acest criteriu, decizia optimă $u^* \in U$ determină costul optimal $R_W(u^*)$ după regula:

the Euclidean space E^n, and $r(u,\omega)$ for any fixed element $\omega \in \Omega$ it is a convex and continuous function in the domain U. That is why, by analogy with the situations where U and Ω are finite, it would be natural to consider the decision-making criteria known also for the sets U, containing an infinity of elements [5].

Wald criterion (pessimist criterion). It would be considered in a more appropriate formula that this criterion be called *the supreme prudence*, because it is not necessary that the decision maker, by his/her nature, to be pessimistic. By applying this criterion, the optimal decision $u^* \in U$ determines the optimal cost $R_W(u^*)$, according to the rule:

$$R_W(u^*) = \min_{u \in U} R_W(u) = \min_{u \in U} \max_{\omega \in \Omega} r(u;\omega). \tag{2}$$

Astfel, în această abordare, decidentul, aşteptându-se, pentru orice variantă de decizie $u \in U$, la pierderi maximale $\max_{\omega \in \Omega} r(u;\omega)$, dar, procedând, totodată, raţional (adică, utilizând posibilităţile sale), va încerca să minimizeze aceste costuri nedorite. Se cunoaşte că funcţia $R_W(u) = \max_{\omega \in \Omega} r(u;\omega)$ (care se va numi funcţia Wald) este convexă pe domeniul U.

Criteriul Savage (criteriul regretelor). Conceptul regretului se consideră echivalent cu evaluarea pierderii suportate din neselectarea celei mai bune alternative, în raport cu realizarea unei anumite stări a naturii [6]. Savage explică (ceea ce este logic în condiţii reale) că decidentul, în mod raţional, va urma calea minimizării celui mai *mare regret posibil*. Aşadar, în raport cu fiecare stare a naturii $\omega \in \Omega$, pentru decizia dată $u \in U$, se va calcula *valoarea regretului:*

Therefore, under this approach, the decision maker who is expecting for any variant of decision $u \in U$, at maximum losses $\max_{\omega \in \Omega} r(u;\omega)$, but also proceeding rationally (i.e. using his/her possibilities), will try to minimize these unwanted costs. It is known that the function $R_W(u) = \max_{\omega \in \Omega} r(u;\omega)$ (which we shall call Wald function) is convex on the domain U.

Savage criterion (criterion of regrets). The concept of regret is considered equivalent to assessing the loss incurred by not selecting the best alternative in relation to achieving a certain state of nature [6]. Savage explains (what is logical in real conditions), that the decision maker will rationally follow the path of minimizing the *greatest regret possible*. Therefore, in relation to each state of nature $\omega \in \Omega$, for the respective decision $u \in U$, shall be calculated the *value of regret*:

$$\bar{r}(u,\omega) = r(u,\omega) - \min_{u \in U}[r(u,\omega)], \tag{3}$$

care reprezintă pierderea (sau plata) suplimentară corespunzătoare perechii (u,ω) în raport cu cea mai bună decizie $u \in U$ pentru starea dată ω a factorului necontrolabil. Deci, dacă decidentul, pentru starea naturii ω, adoptă decizia u, atunci el poate regreta că, nefolosind cea mai bună decizie, va pierde suplimentar $\bar{r}(u,\omega)$ unităţi monetare.

and represent the additional loss (or payment) corresponding to the pair (u,ω) in relation to the best decision $u \in U$ for the given state ω of the uncontrollable factor. So, if the decision maker, for the state of nature ω, makes the decision u, then he or she may regret that by not using the best decision, will lose additional $\bar{r}(u,\omega)$ monetary units.

Definiție. Funcția $\bar{r}(u,\omega)$ se va numi funcție a regretelor în raport cu starea naturii $\omega \in \Omega$, iar $R_S(u) = \max_{\omega\in\Omega} \bar{r}(u;\omega)$ – funcția Savage.

Având funcția sau matricea regretelor $\bar{r}(u,\omega)$, conform conceptului Savage, asupra acesteia se va aplica criteriul Minimax:

Definition. The function $\bar{r}(u,\omega)$ shall be called the function of regrets in relation to the state of nature $\omega \in \Omega$, while $R_S(u) = \max_{\omega\in\Omega} \bar{r}(u;\omega)$ – Savage function.

Having the function or matrix of regrets $\bar{r}(u,\omega)$, according to the Savage concept, the Minimax criterion shall be applied:

$$R_S^* = \min_{u\in U} R_S(u) = \min_{u\in U} \max_{\omega\in\Omega} \bar{r}(u;\omega) \qquad (4)$$

unde valoarea R_S^* reprezintă cea mai mică plată suplimentară la realizarea celei mai nefavorabile stări ω din mulțimea Ω. Se poate constata că, în cazul unei funcții convexe $r(u,\omega)$, pe domeniul convex U, pentru orice stare a factorului necontrolabil, funcția regretelor $\bar{r}(u,\omega)$, de asemenea, este o funcție convexă pe U pentru orice $u \in U$ [7].

Problema minimizării funcției $R_S(u) = \max_{\omega\in\Omega} \bar{r}(u;\omega)$, pe domeniul admisibil U al factorilor de control, sub aspect general, se confruntă cu anumite dificultăți:

- în primul rând, pentru fiecare stare a naturii, este imposibil calculul, cu orice precizie, al valorilor $\min_{u\in U} r(u,\omega)$ și, cu atât mai mult, al valorii funcției regretelor $\bar{r}(u,\omega)$;
- în cazul unei mulțimi Ω cu un număr mare, sau cu o infinitate de elemente, devine problematică evaluarea „corectă” a funcției $R_S(u)$, fără de care e imposibilă soluționarea problemei în întregime.

În acest context, prezintă un mare interes determinarea unor instrumente constructive și eficiente de rezolvare a problemelor, chiar și de natură convexă, în care participă *funcția regretelor Savage*. În continuare, se va presupune că mulțimea Ω constă dintr-un număr finit de elemente: $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_i,...,\omega_m\}$. În baza metodei proiecției gradientului generalizat [8], se va considera o schemă numerică, ce ar soluționa problema minimizării funcției Savage pe domeniul U. Pentru aceasta, în paralel, se construiesc $m+1$ procese similare metodei

where the value R_S^* represents the smallest additional payment for the realization of the most unfavourable state ω of the set Ω. One can find that in case of a convex function $r(u,\omega)$, for the convex domain U, for any state of the uncontrollable factor, the function of regrets $\bar{r}(u,\omega)$, is also a convex function U for any $u \in U$ [7].

The problem of minimization of the function $R_S(u) = \max_{\omega\in\Omega} \bar{r}(u;\omega)$, in the allowed domain U of control factors, generally faces certain difficulties:

- first, for each state of nature, it is impossible to calculate, with any precision, the values $\min_{u\in U} r(u,\omega)$ and the value of the function of regrets $\bar{r}(u,\omega)$;
- in the case of a set Ω with a larger number or an infinity of elements, the “correct” evaluation of the function $R_S(u)$, becomes problematic, without which, the overall settlement of the problem becomes impossible.

In this context, it is of great interest to determine constructive and efficient tools for solving problems, even of a convex nature, with the participation of the Savage function of regrets. Next step, it will be assumed that the set Ω consists of a finite number of elements: $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_i,...,\omega_m\}$. Based on the generalized gradient projection method [8], a numerical scheme is considered to solve the problem of minimizing the Savage function in the domain U. For this purpose, and concomitantly, $m+1$ processes, similar to the respective method, shall be set up, respective. Și anume: pentru fiecare $i=1,2,...,m$ se lansează m procese de calcul iterativ, fiecare dintre care are menirea determinării aproximative a valorilor $\min_{u\in U} r(u;\omega_1)$, $\min_{u\in U} r(u;\omega_2)$, ..., $\min_{u\in U} r(u;\omega_m)$:

and namely: for each $i=1,2,...,m$ processes of iterative calculation shall be launched, each having the purpose to approximately determine the values $\min_{u\in U} r(u;\omega_1)$, $\min_{u\in U} r(u;\omega_2)$, ..., $\min_{u\in U} r(u;\omega_m)$:

$$u_{(i)}^{k+1} = P_U(u_{(i)}^k - h_{(i)k} \cdot gradr(u_{(i)}^k, \omega_i)) \ , \ i = \overline{1,m} . \quad (5)$$

Aici, $gradr(u_{(i)}^k, \omega_i)$ reprezintă gradientul generalizat al funcției $r(u,\omega_i)$ pentru $u = u_{(i)}^k$. Prin urmare, se va conta pe faptul că, odată cu creșterea valorilor k, valorile $r(u_{(i)}^k, \omega_i)$, vor fi din ce în ce mai aproape de $r(u_{(i)}^*, \omega_i) = \min_{u\in U} r(u,\omega_i)$, $i=\overline{1,m}$. Totodată, estimațiile $r(u_{(i)}^k, \omega_i)$ se vor folosi la construirea celui de-al $(m+1)$-lea proces iterativ (acesta din urmă se desfășoară în paralel cu primele m procese):

Here, $gradr(u_{(i)}^k, \omega_i)$ represents the generalized gradient of the function $r(u,\omega_i)$ for $u = u_{(i)}^k$. Therefore, one shall count on the fact that, the higher the values k, values $r(u_{(i)}^k, \omega_i)$ will become more and more closer to $r(u_{(i)}^*, \omega_i) = \min_{u\in U} r(u,\omega_i)$, $i=\overline{1,m}$. At the same time, the estimations $r(u_{(i)}^k, \omega_i)$ will be used for the construction of the $(m+1)$-th iterative process (the latter develops in parallel with the first m processes):

$$u^{k+1} = P_U(u^k - h_k \cdot grad\tilde{R}_S(u^k)) , \quad (6)$$

unde u^0 – arbitrar din U, iar $\tilde{R}_S(u^k) = \max_{1\le i\le m}[r(u^k,\omega_i) - r(u_{(i)}^k, \omega_i)]$.

La realizarea procesului corespunzător de calcul, se va presupune îndeplinirea condițiilor necesare cu privire la mărimile pașilor, pentru asigurarea convergenței șirurilor u_1^k, u_2^k, ..., u_m^k și u^k:

where u^0 – arbitrary of U, while $\tilde{R}_S(u^k) = \max_{1\le i\le m}[r(u^k,\omega_i) - r(u_{(i)}^k, \omega_i)]$.

For the realization of the appropriate calculation process, shall be considered the necessary conditions for the sizes of steps, for the assurance of the convergence of strings u_1^k, u_2^k, ..., u_m^k and u^k:

$$h_{(i)k} \ge 0 \ ; \ h_{(i)k} \to 0 \ ; \ \sum_{k=0}^{\infty} h_{(i)k} = \infty \ ; \ i = 1,2,...m \ ; h_k \ge 0 \ ; \ h_k \to 0 \ ; \ \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \infty \quad (7)$$

Rezultatele cercetării

Abordarea modelului producătorului în viziunile Wald și Savage

Fie, se consideră o situație de decizie, exprimată cantitativ în forma:

Research Results

Approach of the producer's model in the views of Wald and Savage

Consider a decision situation expressed quantitatively in the form:

$$r(u,\omega) = \sum_{j=1}^{n} C_j(\omega) \cdot u_j \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot u_j \le b_i \ , \ i = \overline{1,m} , \quad (9)$$

$$\underline{u_j} \le u_j \le \overline{u_j} \ , \ j = \overline{1,n} . \quad (10)$$

Fie, pentru ilustrare, $n = 1$ și mulțimea „stărilor naturii", formată din două elemente: $\omega \in \{\omega^1, \omega^2\}$. $r(u, \omega)$ – utilitatea exprimată în unități monetare pentru perechea (u, ω).

Conform criteriului Wald, pentru modelele de producție, scopul decidentului este să identifice acea ofertă, care i-ar asigura utilitatea maximală pentru condițiile cele mai nefavorabile. Varianta optimă care determină utilitatea maximală, după Wald, se identifică după regula:

Let us consider, for illustration, $n = 1$ and set of "states of nature" consisting of two elements: $\omega \in \{\omega^1, \omega^2\}$. Here, $r(u, \omega)$ – the utility expressed in monetary units for the pair (u, ω).

According to the Wald criterion, for the production models, the scope of the decision maker is to identify that offer that will assure the maximum utility for the most unfavourable conditions. The optimal variant that determines the maximal utility, according to Wald, can be identified under the rule:

$$R_W(u^*) = \max_{u \in D} R_W(u) = \max_{u \in D} \min_{\omega \in \Omega} r(u, \omega), \tag{11}$$

unde D exprimă domeniul determinat de restricțiile *(9)-(10)*.

Astfel, problema constă în maximizarea funcției:

where D – domain determined by the restrictions *(9)-(10)*.

Therefore, the problem lies in the maximization of the function:

$$R_W(u) = \min_{\omega \in \Omega} r(u; \omega) \to \max_{u \in U} \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot u_j \le b_i, \ i = \overline{1, m}, \tag{13}$$

$$\underline{u_j} \le u_j \le \overline{u_j}, \ j = \overline{1, n}. \tag{14}$$

Se vor defini funcțiile

Functions

$$\Psi_i(u) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot u_j - b_i, \ i = \overline{1, m} \tag{15}$$

și mulțimea $U = \left\{ u = (u_1, ..., u_j, ..., u_n) : \underline{u_j} \le u_j \le \overline{u_j}, \ j = \overline{1, n} \right\}$.

și mulțimea $U = \left\{ u = (u_1, ..., u_j, ..., u_n) : \underline{u_j} \le u_j \le \overline{u_j}, \ j = \overline{1, n} \right\}$.

Utilizând metoda gradientului generalizat [5,8], se va construi un algoritm, care urmează să soluționeze problema maximizării funcției Wald pe domeniul U.

Pentru fiecare $k = 0, 1, ...,$ se va lansa un proces de calcul iterativ, care constă în determinarea elementelor $u^0, u^1, ..., u^k, u^{k+1}, ... \in U$. Punctul u^0 este elementul de start, cunoscut și care poate fi luat arbitrar din U.

Fiind deja obținut u^k, următorul element u^{k+1} se va calcula în conformitate cu regula:

and set $U = \left\{ u = (u_1, ..., u_j, ..., u_n) : \underline{u_j} \le u_j \le \overline{u_j}, \ j = \overline{1, n} \right\}$ shall be defined.

By using the method of the generalized gradient [5,8], an algorithm that will solve the problem of maximization of the Wald function in the domain U shall be built.

For each $k = 0, 1, ...,$ an iterative calculation process meant to determine the elements $u^0, u^1, ..., u^k, u^{k+1}, ... \in U$ shall be launched. The point u^0 is the starting known element, which can be arbitrarily taken from U.

Once the u^k is obtained, the next element u^{k+1} shall be calculated according to the rule:

$$u^{k+1} = \mathrm{P}_U\left(u^k + h_k \cdot \eta^k\right), \ k = 0, 1, 2, ... \tag{16}$$

Aici/ Here:

$$\eta^k = \begin{cases} grad\ R_W(u^k) = \left(C_1(\omega^k),...,C_j(\omega^k),...,C_n(\omega^k)\right)^T,\ dacă/if\ \ \Psi_i(u) \le 0\ \forall\ \mathrm{i} = 1,\ 2,\ ...,\ m \\ -\left(\mathrm{a}_{\mathrm{i}_k 1},\ ...,\ \mathrm{a}_{\mathrm{i}_k j},\ ...,\ \mathrm{a}_{\mathrm{i}_k n},\ \right)^T,\ dacă/if\ \ \Psi_{i_k}(u^k) > 0. \end{cases} \quad (17)$$

$grad\ R_W(u^k)$ – gradientul generalizat al funcției/generalized gradient of the function $R_W(u^k)$ pentru/for $u = u^k$,

unde/where: $\omega^k \in \Omega : R_W(u^k) = r\left(u^k, \omega^k\right) = \min_{\omega\in\Omega} r\left(u^k, \omega\right)$ și/and

$$i_k \in \{1, 2, ..., \mathrm{m}\} : \Psi_{i_k}(u^k) = \max_{1\le i\le m} \Psi_i(u^k).$$

În cazul decizional Savage, dacă, pentru starea dată, venitul scontat e reprezentat de valoarea maximă a funcției $r(u,\omega) = \sum_{j=1}^{n} C_j(\omega)\cdot u_j$, care s-ar obține pentru varianta de decizie $u^*(\omega) : r(u^*(\omega),\omega) = \max_u r(u,\omega)$, în cele ce urmează, se va construi funcția:

$\bar{r}(u,\omega) = r(u^*(\omega),\omega) - r(u,\omega)$, unde $r(u^*(\omega),\omega) - r(u,\omega) \ge 0$ și reprezintă valoarea regretului, iar $u^*(\omega)$ – decizia optimă pentru starea naturii ω.

Problema minimizării funcției-scop Savage, se va expune în forma:

In the Savage decision-making case, if for the respective state the expected income is represented by the maximum value of the function $r(u,\omega) = \sum_{j=1}^{n} C_j(\omega)\cdot u_j$, which can be obtained for the decision variant $u^*(\omega) : r(u^*(\omega),\omega) = \max_u r(u,\omega)$, and in the end, the following function will result:

$\bar{r}(u,\omega) = r(u^*(\omega),\omega) - r(u,\omega)$, where $r(u^*(\omega),\omega) - r(u,\omega) \ge 0$ and represents the value of regret, while $u^*(\omega)$ – the optimal decision for the state of nature ω.

The problem of the minimization of the Savage scope-function is described in the form:

$$R_S(u) = \max_{\omega\in\Omega}\left[\bar{r}(u,\omega)\right] \to \min_{u\in U} \quad (18)$$

Inițial, aplicând metoda Simplex, se vor rezolva *m* probleme liniare de tipul:

Initially, by applying the Simplex method, *m* linear problems of the following type shall be solved:

$$R_i(u) = r(u;\omega_i) = \sum_{j=1}^{n} C_j(\omega_i)\cdot u_j \to \max \quad (19)$$

pentru $i = \overline{1,m}$ cu respectarea restricțiilor *(13)–(14).*

Fie u^{*i} – soluția optimă a problemei *i*. Se va nota $R_i^* = R_i\left(u^{*i}\right)$ și $\bar{r}\left(u,\omega_i\right) = R_i^* - r\left(u,\omega_i\right)$ – valoarea regretului în cazul în care se aplică decizia $u \in U$ și nu u^{*i}. Se poate constata că funcțiile $\bar{r}\left(u,\omega_i\right)$ și $R_S(u)$ sunt convexe [5]. Astfel, în abordarea lui Savage, se va rezolva problema:

for $i = \overline{1,m}$ by observing the restrictions *(13)–(14).*

Is considered that u^{*i} – the optimal solution for the problem *i*. It will be noticed $R_i^* = R_i\left(u^{*i}\right)$ and $\bar{r}\left(u,\omega_i\right) = R_i^* - r\left(u,\omega_i\right)$ – the value of regret, if the decision $u \in U$ is applied and not u^{*i}. Can be concluded that the functions $\bar{r}\left(u,\omega_i\right)$ and $R_S(u)$ are not convex [5]. Therefore, the problem shall be solved in the Savage approach, as follows:

$$R_S(u) = \max_{1 \le i \le m} \left[\bar{r}(u, \omega_i) \right] \to \min_{u \in U} \tag{20}$$

În acest scop, se va considera:

For this purpose, shall be considered:

$$u^{k+1} = \mathrm{P}_U \left(u^k - h_k \cdot \eta^k \right), \ k = 0, 1, 2, ... \tag{21}$$

unde/where

$$\eta^k = \begin{cases} \text{grad}\, R_S \left(u^k \right) = - \left(C_1(\omega^k), ..., \ C_j(\omega^k), ..., \ C_n(\omega^k) \right)^T, \\ \qquad \qquad dacă\,/\,if \ \ \Psi_i(u^k) \le 0 \ \forall \ \mathrm{i} = 1,\, 2,\, ...,\, \mathrm{m}, \\ \qquad \qquad unde\,/\,where \ \omega^k \in \Omega : r_S \left(u^k, \omega^k \right) = \max_{1 \le i \le N} r_S \left(u^k, \omega_i \right); \\ \left(\mathrm{a}_{\mathrm{i_k}1}, \ ..., \mathrm{a}_{\mathrm{i_k}j}, \ ..., \mathrm{a}_{\mathrm{i_k}n}, \right)^T, \ dacă\,/\,if \ \ \Psi_{i_k}(u^k) > 0. \end{cases} \tag{22}$$

Reglarea mărimii pasului va fi efectuată în varianta programată (7). În cazul în care $\Psi_i(u^k) \le 0$, trecerea de la u^k către u^{k+1} se va realiza utilizând gradientul generalizat al funcției $R_S(u)$, calculat în punctul $u = u^k$. În caz contrar, dacă cel puțin o restricție se va încălca, de exemplu, $\Psi_{i_k}(u^k) > 0$, la deplasarea de la u^k către u^{k+1}, se va folosi gradientul funcției Ψ_{i_k}, de abatere maximală în punctul $u = u^k$ [9, 10].

Modelul transporturilor cu factori incerți

Problema echilibrată de transport constă în stabilirea unui plan optim de distribuție a unor produse, aflate în posesia furnizorilor, către piețele de desfacere, cu condiția că cantitatea oferită este echivalentă cu cea solicitată de către consumatori. Formularea clasică a unei astfel de probleme constă în următoarele. Se admite că m furnizori $A_1, ..., A_i, ..., A_m$ dețin un produs omogen în cantitățile $a_1, ..., a_i, ..., a_m$, ce necesită a fi livrate spre n centre de consum $B_1, ..., B_j, ..., B_n$ în cantitățile $b_1, ..., b_j, ..., b_n$. Se va presupune că prețul $C_{ij} = C_{ij}(\omega)$, adică, depinde de starea naturii ω [11]. Fie x_{ij} – cantitatea de produs care urmează a fi transportată de la furnizorul A_i spre consumatorul B_j.

Dacă s-ar cunoaște starea naturii ω, atunci s-ar rezolva problema:

The adjustment of the step size will be performed in the programmed variant (7). If $\Psi_i(u^k) \le 0$, the transition from u^k to u^{k+1} shall be done by using the generalized gradient of the function $R_S(u)$, calculated in point $u = u^k$. Otherwise, if at least one restriction is violated, for example $\Psi_{i_k}(u^k) > 0$, when moving from u^k to u^{k+1}, the gradient of the function Ψ_{i_k} shall be used, of maximum deviation at the point $u = u^k$ [9, 10].

Transportation model with uncertain factors

The balanced transportation problem consists in establishing an optimal distribution plan of products, held by suppliers, to the retail markets, provided that the quantity offered is equivalent to the one requested by consumers. The classic formulation of such an exercise includes the following elements. Will be considered that m suppliers $A_1, ..., A_i, ..., A_m$ hold a homogenous product in the quantities $a_1, ..., a_i, ..., a_m$, which must be delivered to n consumption centers $B_1, ..., B_j, ..., B_n$ in the quantities $b_1, ..., b_j, ..., b_n$. Is assumed that the price $C_{ij} = C_{ij}(\omega)$, depends on the state of nature ω [11]. Is noticed x_{ij} – quantity of product that must be delivered from supplier A_i to consumer B_j.

If the state of nature ω is known, then can be solved the problem:

$$Z(x,\omega)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}(\omega)\cdot x_{ij}\rightarrow\min_{\{x_{ij}\}} \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_{i,}\ \ i=\overline{1,m} \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ge b_{j,}\ \ j=\overline{1,n} \tag{25}$$

$$x_{ij}\ge 0 \tag{26}$$

Fie că factorul $\omega\in\Omega=\{\omega^1,\omega^2,...,\omega^r\}$. În continuare, se va considera modelul transporturilor în viziunea criteriului Savage:

Let factor $\omega\in\Omega=\{\omega^1,\omega^2,...,\omega^r\}$, be considered as the transportation model in the overview of Savage criterion:

$$Z_S(x)=\max_{\omega^k\in\Omega}\left(Z(x,\omega)-Z^*(\omega^k)\right)\rightarrow\min \tag{27}$$

Se vor formula r probleme cu condițiile (24)-(26):

r problems will be formulated in the conditions (24)-(26):

$$Z^*(\omega^k)=\min_x Z(x,\omega^k)=\min_x\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}(\omega^k)\cdot x_{ij}\ ,\ k=1,2,...,r\ . \tag{28}$$

Fie $Z^*{}_k=\min Z(x,\omega^k)$, iar $Z(x,\omega^k)-Z^*{}_k$ – valoarea regretului pentru $\omega=\omega^k$.

Astfel, $Z_S(x)=\max_{1\le k\le r}\left(Z(x,\omega^k)-Z^*{}_k\right)$ – valoarea maximă a regretului în condiția că planul de transport este reprezentat de setul:

Consider $Z^*{}_k=\min Z(x,\omega^k)$, while $Z(x,\omega^k)-Z^*{}_k$ – the value of regret for $\omega=\omega^k$.

Therefore, $Z_S(x)=\max_{1\le k\le r}\left(Z(x,\omega^k)-Z^*{}_k\right)$ – the maximum value of regret in the condition that the transportation plan is represented by the set:

$$x=\{x_{ij}\}\ ,\ i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}\ .$$

În continuare, se va determina varianta x_S^*:

Now, is determined the variant x_S^*:

$$Z_S(x_S^*)=\min_{x\in D}Z_S(x) \tag{29}$$

unde, D reprezintă restricțiile (24)-(26).

Se vor defini funcțiile:

where, D – represents the restrictions (24)-(26).

Shall be defined the following functions:

$$\Phi_i(x_{i1},...,x_{in})=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-a_i\ ,\ i=\overline{1,m}\ ; \tag{30}$$

$$\Psi_j(x_{1j},...,x_{mj})=b_j-\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ ,\ j=\overline{1,n}\ . \tag{31}$$

Este evident, dacă x – soluție admisibilă $\Rightarrow\Phi_i(\bullet)\ \le 0,\ \forall\ \ i=\overline{1,m}$ și $\Psi_j(\bullet)\ \le 0,\ \forall\ \ j=\overline{1,n}$.

It is obvious, that if x – feasible solution $\Rightarrow\Phi_i(\bullet)\ \le 0,\ \forall\ \ i=\overline{1,m}$ and $\Psi_j(\bullet)\ \le 0,\ \forall\ \ j=\overline{1,n}$.

Pentru început, se va determina o soluție de start $x^0 = \{x_{ij}^0\} : x_{ij}^0 \geq 0$. Fie că mulțimea:

First, a start solution must be identified $x^0 = \{x_{ij}^0\} : x_{ij}^0 \geq 0$. Consider the set:

$$X = \left\{ x = \{x_{ij}\},\ i = \overline{1,m}\ ; j = \overline{1,n}\ \ :\ \ x_{ij} \geq 0 \right\}.$$

Se va defini următorul proces iterativ, care va consta în determinarea succesivă a *matricelor* $x^0, x^1, x^2, ..., x^s, x^{s+1}, ...$ aplicându-se metoda gradientului generalizat într-o formă modificată [8] și adaptată structurilor de date utilizate. Aici, $x^s = \{x_{ij}^s\}$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ – varianta de decizie care corespunde iterației ‘*s*’. Următoarea *matrice* x^{s+1} se calculează ca proiecția:

The following iterative process must be defined, which will refer to successive determination of matrixes $x^0, x^1, x^2, ..., x^s, x^{s+1}, ...$ by applying the method of generalized gradient in a modified form [6] and adapted to the used data structures. Here, $x^s = \{x_{ij}^s\}$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ – the decision variant which corresponds to the iteration ‘s’. The next matrix x^{s+1} is calculated as the projection:

$$x^{s+1} = P_X(x^s - h_s \cdot g^s)\ , \tag{32}$$

unde $g^s = \left\{ g_{ij}^s \right\}, i = \overline{1,m}\,; j = \overline{1,n}$ – determină direcția deplasării la pasul ‘*s+1*’.

În continuare, cu $\delta_s > 0$ se va nota mărimea „pragului de toleranță” asociat iterației *s*.

Astfel, algoritmul de soluționare va avea forma:

$|1\rangle$ Fie că toate funcțiile $\Phi_i\ (\bullet) \leq \delta_s$ și $\Psi_j\ (\bullet) \leq \delta_s$ în cazul $x = x^s$. Atunci $g_{ij}^s = C_{ij}^s$ iar $C^s : Z_S(x^s) = \max\limits_{1 \leq k \leq r}\left(Z(x^s, \omega^k) - Z_k^* \right)$. În acest caz, $Z(x^s, \omega^k) = \sum\limits_i \sum\limits_j C_{ij}(\omega^k) \cdot x_{ij}^s$;

$|2\rangle$ Fie că $\Phi_{i1}(\bullet) > \delta_s$, $\Phi_{i2}(\bullet) > \delta_s$, …, $\Phi_{il}(\bullet) > \delta_s$ și/sau $\Psi_{j1}(\bullet) > \delta_s$, $\Psi_{j2}(\bullet) > \delta_s$, …, $\Psi_{jt}(\bullet) > \delta_s$; $1 \leq l \leq m$; $1 \leq t \leq n$ unde $i_1, i_2, ..., i_l$ reprezintă indicii acelor funcții Φ_i, $i = \overline{1,m}$, pentru care $\Phi_i\ (\bullet) > 0$. Respectiv $j_1, j_2, ..., j_t$ - indicii funcțiilor Ψ_j, $j = \overline{1,n}$, pentru care $\Psi_j\ (\bullet) > 0$.

where $g^s = \left\{ g_{ij}^s \right\}, i = \overline{1,m}\,; j = \overline{1,n}$ – determines the direction of movement at the step ‘*s+1*’.

Next, $\delta_s > 0$ will refer to the size of “tolerance threshold” associated to iteration *‘s’*.

Therefore, the algorithm for settlement will have the form:

$|1\rangle$ Consider that all functions $\Phi_i\ (\bullet) \leq \delta_s$ and $\Psi_j\ (\bullet) \leq \delta_s$ in the case $x = x^s$. Then $g_{ij}^s = C_{ij}^s$, while $C^s : Z_S(x^s) = \max\limits_{1 \leq k \leq r}\left(Z(x^s, \omega^k) - Z_k^* \right)$. In this case, $Z(x^s, \omega^k) = \sum\limits_i \sum\limits_j C_{ij}(\omega^k) \cdot x_{ij}^s$;

$|2\rangle$ Consider that $\Phi_{i1}(\bullet) > \delta_s$, $\Phi_{i2}(\bullet) > \delta_s$, …, $\Phi_{il}(\bullet) > \delta_s$ and/or $\Psi_{j1}(\bullet) > \delta_s$, $\Psi_{j2}(\bullet) > \delta_s$, …, $\Psi_{jt}(\bullet) > \delta_s$; $1 \leq l \leq m$; $1 \leq t \leq n$ where $i_1, i_2, ..., i_l$ represents the indicators of those functions Φ_i, $i = \overline{1,m}$, for which $\Phi_i\ (\bullet) > 0$. Therefore, $j_1, j_2, ..., j_t$ - indicators of functions Ψ_j, $j = \overline{1,n}$, for which $\Psi_j\ (\bullet) > 0$.

– Dacă/If $\Phi_i\ (x_{i1}^s,\ x_{i2}^s,\ ...,\ x_{in}^s) > \delta_s$, atunci/then $g_{ij}^s = 1$.

– Dacă/If $\Phi_i\ (x_{i1}^s,\ x_{i2}^s,\ ...,\ x_{in}^s) \leq \delta_s$, atunci/then $g_{ij}^s = 0$.

– Dacă/If $\Psi_j\ (x_{j1}^s,\ x_{j2}^s,\ ...,\ x_{jm}^s) > \delta_s$, atunci/then $g_{ij}^s = -1$.

– Dacă/If $\Psi_j\ (x_{j1}^s,\ x_{j2}^s,\ ...,\ x_{jm}^s) \leq \delta_s$, atunci/then $g_{ij}^s = 0$.

– Dacă/If $\Phi_i\ (x_{i1}^s,\ x_{i2}^s,\ \ldots,\ x_{in}^s) > \delta_s$ și $\Psi_j\ (x_{j1}^s,\ x_{j2}^s,\ \ldots,\ x_{jm}^s) > \delta_s$, atunci/then

$$g_{ij}^s = \begin{Bmatrix} 1,\ dacă\,/\,if\ \ \Phi_i(\bullet) \geq \Psi_j(\bullet) \\ -1,\ dacă\,/\,if\ \ \Phi_i(\bullet) < \Psi_j(\bullet) \end{Bmatrix}.$$

Pentru realizarea schemei prezentate cu aplicarea „pragului de toleranță”, este necesar ca șirurile numerice $\{h_s\}$ și $\{\delta_s\}$ să respecte următoarele condiții (7)[12,13].

Monopolul și incertitudinea

Monopolurile sunt caracterizate de o absență a competiției economice în producerea bunurilor sau prestarea serviciilor, precum și de lipsa altor bunuri substituibile. Astfel, un singur producător deține controlul stabilirii prețului pentru produsele oferite pieței. Un monopolist are posibilitatea să fixeze cu cât va comercializa un produs, iar apoi să se aprecieze și ce cantitate urmează să fie comercializată. Pentru situațiile când monopolistul activează în condiții de incertitudine (iar aceasta este generată de faptul că prognozele unor rezultate nu sunt exacte și pot varia pe un anumit interval, valoarea riscului nu poate fi, nicidecum, cuantificată, iar același profit nu mai poate fi garantat, indiferent de cantitatea ori prețul ales), se poate constata că cererea, ca și componentă a formării profitului, reprezintă o valoare aleatorie, dependentă inclusiv de modul în care producătorul monopolist stabilește cuantumul comercializării produsului sau serviciului [14,15].

Fie că se consideră o situație decizională a activității de producere în condiții de monopol, exprimată în forma:

In order to realize the presented scheme with the application of the “tolerance threshold”, it is necessary that the numeric strings $\{h_s\}$ and $\{\delta_s\}$ comply with the following conditions (7) [12, 13].

Monopoly and uncertainty

Monopolies are characterized by an absence of economic competition in the production of goods or the provision of services, as well as by the lack of other substitutable goods. Therefore, a single producer holds the control over the price setting for products offered to the market. A monopolist has the opportunity to determine how much a product will cost, and then to assess the quantity offered for sale. For situations when the monopolist carries out activities under conditions of uncertainty (and this is caused by the fact that the forecasts of some results are not exact and can vary on a certain interval, the value of the risk cannot be quantified at all, and the same profit can no longer be guaranteed, regardless of the quantity or price chosen), it can be seen that the demand, as a component of the formation of the profit, represents a random value, dependent also on the way the monopolist producer establishes the quantum of traded products or services [14,15].

Whether it is considered a decisive situation of the production activity under monopoly conditions, expressed in the form:

$$R(x,y,Y) = \sum_{j=1}^{n}\Big[c_j(y_j)\cdot min\big\{y_j,Y_j\big\} - p_i\cdot max\big\{0,y_j-Y_j\big\}\Big] - \sum_{i=1}^{m} q_i\cdot x_i \tag{33}$$

cu respectarea următoarelor restricții:

by observing the following restrictions:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq b_i + x_i\,,\ i=\overline{1,m} \tag{34}$$

$$y = \big(y_1,\ldots,y_j,\ldots,y_n\big) \in D_y = \Big\{y \in E^n : \underline{y_j} \leq y_j \leq \overline{y_j},\ j=\overline{1,n}\Big\} \tag{35}$$

$$Y = \big(Y_1,\ldots,Y_j,\ldots,Y_n\big) \in D_Y = \Big\{Y \in E^n : \underline{Y_j} \leq Y_j \leq \overline{Y_j},\ j=\overline{1,n}\Big\} \tag{36}$$

$$x = \big(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_m\big) \in D_x = \Big\{x \in E^m : \underline{x_i} \leq x_i \leq \overline{x_i},\ i=\overline{1,m}\Big\} \tag{37}$$

$R(x,y,Y)$ exprimă profitul producătorului monopolist, care depinde de setul (x,y,Y);

$R(x,y,Y)$ – profit of monopolist producer, that depends on the set (x,y,Y);

x_i – cantitatea de resurse i, ce urmează să fie achiziționată la prețul q_i, $i=\overline{1,m}$,

y_j – volumul ofertei;

Y_j – volumul cererii la bunul j, $j=\overline{1,n}$;

b_i – disponibilul resurselor i, care se află în posesia producătorului monopolist.

Se va considera că prețul la bunul j, $c_j(y_j)$ descrește liniar în raport cu y_j:

x_i – quantity of resources i, that shall be purchased at the price q_i, $i=\overline{1,m}$,

y_j – volume of offer;

Y_j – volume of offer for the goods j, $j=\overline{1,n}$;

b_i – available i resources held in the possession of the monopolist producer.

Consider that the price for the goods j, $c_j(y_j)$, decreases linearly in relation to y_j:

$$c_j(y_j)=\overline{c_j}-(\overline{c_j}-\underline{c_j})\cdot(y_j-\underline{y_j})/(\overline{y_j}-\underline{y_j}) \tag{38}$$

Unde: $\underline{c_j}$ și $\overline{c_j}$ indică limita inferioară, respectiv, superioară de variație a prețului bunului j;

$\underline{y_j}$ și $\overline{y_j}$ – limita inferioară, respectiv, superioară de variație a volumului cererii bunului j.

Pentru modelele de producție, conform criteriului Wald, varianta optimă (x_W^*, y_W^*) se va identifica conform regulii:

Where: $\underline{c_j}$ and $\overline{c_j}$ – the inferior and superior limit of variation of the goods' price j;

$\underline{y_j}$ and $\overline{y_j}$ – the inferior and superior limit of variation of the volume of goods demand j.

For the production models, according to the Wald criterion, the optimal variant (x_W^*, y_W^*) will be identified according to the rule:

$$R_W(x_W^*, y_W^*)=\max_{(x,y)}\min_{Y} R(x,y,Y). \tag{39}$$

Evident, funcția $R_W(x,y)=\min_{Y} R(x,y,Y)$ este concavă, în raport cu setul (x,y) pe domeniul $D_x\times D_y$. Conform metodei gradientului generalizat [6,8], se va construi un algoritm, care va soluționa problema de maximizare a funcției $R_W(x,y)$ pe $D_x\times D_y$. Pentru aceasta, inițial, se vor defini funcțiile:

Obviously, the function $R_W(x,y)=\min_{Y} R(x,y,Y)$ is concave with respect to the set (x,y) on the domain $D_x\times D_y$. According to the generalized gradient method [6, 11], an algorithm will be constructed that will solve the problem of maximizing the function $R_W(x,y)$ on $D_x\times D_y$. For this purpose, are defined the functions:

$$\Phi_i(x_i,y)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j-b_i-x_i,\ i=\overline{1,m}; \tag{40}$$

$$\Phi(x,y)=\max\{\Phi_1(x_1,y),\ldots,\Phi_m(x_m,y)\} \tag{41}$$

Apoi, pentru fiecare $k = 0, 1, \ldots$, se va realiza un proces de calcul iterativ, care va consta în determinarea a două șiruri de vectori $\{x^k\}$ și $\{y^k\}$, în conformitate cu regulile:

Then, for each $k = 0, 1, \ldots$, an iterative calculation process shall be carried out, which will consist of two strings of vectors $\{x^k\}$ and $\{y^k\}$, according to the rule:

$$dacă\ /\ if\ \ \Phi(x^k, y^k) \le \delta_k \Rightarrow \begin{Bmatrix} y^{k+1} = P_{D_y}(y^k + h_k \cdot g_y^k),\ unde/where\ g_y^k = gradR_y(x^k, y^k, Y^k), \\ x^{k+1} = P_{D_x}(x^k + h_k \cdot g_x^k),\ unde/where\ g_x^k = gradR_x(x^k, y^k, Y^k). \end{Bmatrix}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \left(gradR_y(x^k, y^k, Y^k)\right)_j &= c_j(y_j) \cdot min\left\{y_j; Y_j\right\} + \begin{cases} c_j(y_j),\ dacă/if\ y_j \le Y_j \\ 0,\ dacă/if\ y_j > Y_j \end{cases} - \\ &- \begin{cases} p_j,\ dacă/if\ y_j > Y_j \\ 0,\ dacă/if\ y_j \le Y_j \end{cases} = \begin{cases} c_j'(y_j) \cdot y_j + c_j(y_j) - 0,\ dacă/if\ y_j \le Y_j, \\ c_j'(y_j) \cdot y_j + 0 - p_j,\ dacă/if\ y_j > Y_j. \end{cases} \end{aligned}, \quad (43)$$

$$c_j'(y_j) \cdot y_j = -(\overline{c_j} - \underline{c_j}) / (\overline{y_j} - \underline{y_j}), \quad (44)$$

$$\left(gradR_x(x^k, y^k, Y^k)\right)_i = -q_i,\ unde/where\ i = \overline{1,m}. \quad (45)$$

$$dacă\ /\ if\ \ \Phi(x^k, y^k) > \delta_k \ \Rightarrow \begin{Bmatrix} y^{k+1} = P_{D_y}(y^k - h_k \cdot g_y^k),\ unde/where\ g_y^k = grad\Phi_y(x^k, y^k), \\ x^{k+1} = P_{D_x}(x^k - h_k \cdot g_x^k),\ unde/where\ g_x^k = grad\Phi_x(x^k, y^k). \end{Bmatrix}, \quad (46)$$

$$\left(grad\Phi_y(x^k, y^k)\right)_j = a_{i^k j},\ i^k = \left\{1,2,3,...\right\} : \Phi_{i^k}(x_{i^k}^k, y^k) = \max\left\{\Phi_1(x_1^k, y^k), ..., \Phi_m(x_m^k, y^k)\right\}, \quad (47)$$

$$\left(grad\Phi_x(x^k, y^k)\right)_i = \begin{cases} -1,\ dacă/if\ i = i^k \\ 0,\ dacă/if\ i \ne i^k \end{cases}. \quad (48)$$

În acest caz, Y^0 – un element arbitrar din D_Y (de exemplu, generat aleatoriu).

Pentru fiecare $k \ge 1$, elementul Y^k se va determina astfel:

In this case, Y^0 - an arbitrary element of D_Y (for example, generated randomly).

For each $k \ge 1$, the element Y^k shall be determined as follows:

$$Y^k = \begin{Bmatrix} Y^{k-1},\ dacă/if\ \ R(x^k, y^k, Y^{k-1}) \le R(x^k, y^k, \tilde{Y}^k) \\ \tilde{Y}^k,\ \ dacă/if\ \ R(x^k, y^k, Y^{k-1}) > R(x^k, y^k, \tilde{Y}^k) \end{Bmatrix}. \quad (49)$$

Aici, $\tilde{Y}^k$ reprezintă elementul din D_Y generat aleatoriu la iterația *k*, în conformitate cu o oarecare lege de repartiție $P(dY)$ (în particular, ar putea fi repartiție uniformă pe domeniul D_Y).

Conform criteriului lui Savage, problema minimizării funcției-scop va avea aspectul:

Here, $\tilde{Y}^k$ represents the element from D_Y generated randomly in the iteration k, according to a certain distribution law $P(dY)$ (in particular, there could be uniform distribution in the field D_Y).

According to Savage criterion, the problem of minimizing the purpose function will have the following aspect:

$$R_S(x,y) = \underset{Y}{max}\left(\underset{(x,y)}{max}\ R(x,y,Y) - R(x,y,Y)\right) \to \underset{(x,y)}{min} \quad (50)$$

Este necesar de menționat că funcția $R_S(x,y)$ este convexă, în raport cu (x,y) pe $D_x \times D_y$.

Astfel, în abordarea lui Savage, se va considera următoarea schemă de soluționare a modelului monopolist:

It is necessary to mention that the function $R_S(x,y)$ is convex in relation to (x,y) on $D_x \times D_y$.

Therefore, in Savage's approach, the following scheme for solving the monopoly model will be considered:

1) în conformitate cu legea de distribuție uniformă pe domeniul D_Y, se va genera un set de elemente (acestea reprezentând vectori aleatorii independenți) $Y^1,...,Y^l,...,Y^L$, fiind privit, în ansamblu, ca un eșantion din mulțimea D_Y;
2) se vor considera L probleme de optimizare, numite probleme interne:

1) in accordance with the law of uniform distribution on the domain D_Y, a set of elements will be generated (these representing independent random vectors), $Y^1,...,Y^l,...,Y^L$ being generally regarded as a sample from the crowd D_Y;
2) L problems of optimization shall be considered, called internal problems:

$$R^l(x,y) = R(x,y,Y^l) \to \max_{(x,y)},\ l = 1,2,...,L, \tag{51}$$

$$R(x,y,Y^l) = \sum_{j=1}^{n}\left[c_j(y_j)\cdot min\left\{y_j, Y_j^l\right\} - p_i \cdot max\left\{0, y_j - Y_j^l\right\}\right] - \sum_{i=1}^{m} q_i \cdot x_i, \tag{52}$$

cu respectarea condițiilor: $\Phi(x,y) \le 0$; $(x,y) \in D_x \times D_y$.

Fie că (x^{*l}, y^{*l}) este soluția optimă a problemei $l(l=\overline{1,L})$ și $R^{*l} = \max\limits_{(x,y)} R^l(x,y)$;

3) se va considera următoarea problemă (numită și problemă externă), care, la drept vorbind, reprezintă o aproximare stocastică a criteriului Savage:

by observing the conditions: $\Phi(x,y) \le 0$; $(x,y) \in D_x \times D_y$.

Consider (x^{*l}, y^{*l}) as the optimal solution of the problem $l(l=\overline{1,L})$ and $R^{*l} = \max\limits_{(x,y)} R^l(x,y)$;

3) the following problem shall be considered (also called external problem), which represents a stochastic approximation of the Savage criterion:

$$\tilde{R}_S(x,y) = \max_{1\le l\le L}\left[R^{*l} - R^l(x,y)\right] \to \min_{(x,y)} \tag{53}$$

4) se vor construi $L+1$ șiruri de forma: $\left\{x^{kl}, y^{kl}\right\}$, $l=\overline{1,L}$, $\left\{x^k, y^k\right\}$, $k = 0,1,2,...$, unde $\left(x^{0l}, y^{0l}\right)$ și $\left(x^0, y^0\right)$ sunt a priori determinate din mulțimea $D_x \times D_y$. Elementele $\left(x^{0l}, y^{0l}\right)$, $l=\overline{1,L}$, $\left(x^0, y^0\right)$ se vor numi puncte de start pentru cele $L+1$ probleme, corespunzător;
5) se vor determina două șiruri numerice h_k și δ_k:

4) $L+1$ strings of the form: $\left\{x^{kl}, y^{kl}\right\}$, $l=\overline{1,L}$, $\left\{x^k, y^k\right\}$, $k = 0,1,2,...$, shall be created, where $\left(x^{0l}, y^{0l}\right)$ and $\left(x^0, y^0\right)$ are *apriori* determined by the set $D_x \times D_y$. The elements $\left(x^{0l}, y^{0l}\right)$, $l=\overline{1,L}$, $\left(x^0, y^0\right)$ shall be called starting points for the $L+1$ problems;
5) two numerical strings shall be determined h_k and δ_k:

$$h_k = \frac{H}{(k+1)^\alpha};\ \delta_k = \frac{\Delta}{(k+1)^\beta};\ h_k, \delta_k > 0;\ h_k, \delta_k \to 0;\ \alpha+\beta \le 1;\ \sum_{k=0}^{\infty} h_k\delta_k = \infty;\ {h_k}/{\delta_k} \to 0; \tag{54}$$

6) fiind deja determinate punctele $\left\{x^{kl}, y^{kl}\right\}$,

6) when the points are already determined $\left\{x^{kl}, y^{kl}\right\}$, $l=\overline{1,L}$ and $\left\{x^k, y^k\right\}$, the

$l=\overline{1,L}$ și $\left\{x^k, y^k\right\}$, următoarele elemente $\left\{x^{(k+1)l}, y^{(k+1)l}\right\}$, $l=\overline{1,L}$, $\left\{x^{k+1}, y^{k+1}\right\}$ se vor calcula astfel [16]:

next elements $\left\{x^{(k+1)l}, y^{(k+1)l}\right\}$, $l=\overline{1,L}$, $\left\{x^{k+1}, y^{k+1}\right\}$ shall be calculated as follows [16]:

$$dacă\,/\,if\;\; \Phi(x^{kl}, y^{kl}) \le \delta_k \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^{(k+1)l} = P_{D_x}(x^{kl} + h_k \cdot g_x^{kl}),\; unde/where\; g_x^{kl} = grad_x R^l(x^{kl}, y^{kl}), \\ y^{(k+1)l} = P_{D_y}(y^{kl} + h_k \cdot g_y^{kl}),\; unde/where\; g_y^{kl} = grad_y R^l(x^{kl}, y^{kl}). \end{array}\right\}, \quad (55)$$

$$\left(g_x^{kl}\right)_{i=\overline{1,m}} = \left(grad_x R^l(x^{kl}, y^{kl})\right)_{i=\overline{1,m}} = -q_i\,, \quad (56)$$

$$\left(g_y^{kl}\right)_{j=\overline{1,n}} = \left(grad_y R^l(x^{kl}, y^{kl})\right)_{j=\overline{1,n}} = \left\{\begin{array}{l} c_j'(y_j^{kl}) \cdot y_j^{kl} + c_j(y_j^{kl}),\; dacă/if\;\; y_j^{kl} \le Y_j^l \\ \quad c_j'(y_j^{kl}) \cdot Y_j^l + p_j,\; dacă/if\;\; y_j^{kl} > Y_j^l \end{array}\right., l=1,2,...,L\,, \quad (57)$$

$$c_j'(y_j^{kl}) = -(\overline{c_j} - \underline{c_j}) \,/\, (\overline{y_j} - \underline{y_j})\,. \quad (58)$$

$$dacă\,/\,if\;\; \Phi(x^{kl}, y^{kl}) > \delta_k \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^{(k+1)l} = P_{D_x}(x^{kl} - h_k \cdot g_x^{kl}),\; unde/where\; g_x^{kl} = grad_x \Phi(x^{kl}, y^{kl}), \\ y^{(k+1)l} = P_{D_y}(y^{kl} - h_k \cdot g_y^{kl}),\; unde/where\; g_y^{kl} = grad_y \Phi(x^{kl}, y^{kl}). \end{array}\right\}, \quad (59)$$

$$\left(g_x^{kl}\right)_{i=\overline{1,m}} = \left(grad_x \Phi(x^{kl}, y^{kl})\right)_{i=\overline{1,m}} = \left\{\begin{array}{l} -1,\; dacă/if\;\; i=i^k \\ \;\; 0,\; dacă/if\;\; i \ne i^k \end{array}\right.,$$
$$unde/where\;\; i^k = \left\{1,2,3,...\right\} : \Phi_{i^k}(x_{i^k}^{kl}, y^{kl}) = \max\left\{\Phi_1(x_1^{kl}, y^{kl}), ..., \Phi_m(x_m^{kl}, y^{kl})\right\}, \quad (60)$$

$$\left(g_y^{kl}\right)_{j=\overline{1,n}} = \left(grad_y \Phi(x^{kl}, y^{kl})\right)_{j=\overline{1,n}} = a_{i^k j}\,. \quad (61)$$

$$dacă\,/\,if\;\; \Phi(x^k, y^k) \le \delta_k \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^{k+1} = P_{D_x}(x^k - h_k \cdot g_x^k),\; unde/where\; g_x^k = grad_x \tilde{R}_S^k(x^k, y^k), \\ y^{k+1} = P_{D_y}(y^k - h_k \cdot g_y^k),\; unde/where\; g_y^k = grad_y \tilde{R}_S^k(x^k, y^k). \end{array}\right\}, \quad (62)$$

$$\left(g_x^k\right)_{i=\overline{1,m}} = \left(grad_x \tilde{R}_S^k(x^k, y^k)\right)_{i=\overline{1,m}} = q_i\,, \quad (63)$$

$$\left(g_y^k\right)_{j=\overline{1,n}} = \left(grad_y \tilde{R}_S^k(x^k, y^k)\right)_{j=\overline{1,n}} = \left\{\begin{array}{l} -c_j'(y_j^k) \cdot y_j^k - c_j(y_j^k),\; dacă/if\;\; y_j^k \le Y_j^{l_k} \\ \quad -c_j'(y_j^k) \cdot Y_j^{l_k} + p_j,\; dacă/if\;\; y_j^k > Y_j^{l_k} \end{array}\right.,$$
$$unde\,/\,where\;\; l \in \left\{1,2,...,L\right\} : R^{l_k}(x^{kl_k}, y^{kl_k}) - R^{l_k}(x^k, y^k) = \max_{1\le l\le L}\left\{R^l(x^{kl}, y^{kl}) - R^l(x^k, y^k)\right\} \quad (64)$$

Aici/Here: $\tilde{R}_S^k(x^k, y^k) = \max\limits_{1\le l\le L}\left[R^l(x^{kl}, y^{kl}) - R^l(x^k, y^k)\right]$.

(65)

$$dacă\,/\,if\;\; \Phi(x^k, y^k) > \delta_k \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^{k+1} = P_{D_x}(x^k - h_k \cdot g_x^k),\; unde/where\; g_x^k = grad_x \Phi(x^k, y^k), \\ y^{k+1} = P_{D_y}(y^k - h_k \cdot g_y^k),\; unde/where\; g_y^k = grad_y \Phi(x^k, y^k). \end{array}\right\}, \quad (66)$$

$$\left(g_x^k\right)_{i=\overline{1,m}} = \left(grad_x \Phi(x^k, y^k)\right)_{i=\overline{1,m}} = \begin{cases} -1, \ dacă/if \ \ i=i^k \\ \ \ 0, \ dacă/if \ \ i \neq i^k \end{cases}, \quad , \tag{67}$$

$$unde/where \ i^k = \{1,2,3,...m\} : \Phi_{i^k}(x^k_{i^k}, y^k) = \max\left\{\Phi_1(x_1^k, y^k), ..., \Phi_m(x_m^k, y^k)\right\}$$

$$\left(g_y^k\right)_{j=\overline{1,n}} = \left(grad_y \Phi(x^k, y^k)\right)_{j=\overline{1,n}} = a_{i^k j} \, . \tag{68}$$

Concluzii

În condiții de incertitudine, decidentul trebuie să aleagă o alternativă oarecare din cele existente având doar unele informații cu privire la profitabilitatea lor. În această lucrare, se descriu aspectele teoretice ale aplicabilității criteriilor Wald și Savage, ajustate la problema de maximizare a profitului producătorului monopolist, cu utilizarea directă a tehnicii gradientului generalizat. Algoritmii descriși posedă un caracter iterativ, iar particularitatea lor constă în „apropierea”, cu o oarecare aproximație, de vecinătatea soluției optime, care să fie admisibilă pentru toate stările naturii incluse în modelul matematic. Algoritmul descris pentru criteriul de maximă prudență este caracterizat prin oferirea unei soluții, care, aplicată ulterior, va garanta decidentului un anumit profit, în pofida realizării chiar și celei mai nefavorabile stări a naturii. Această abordare asigură producătorul că o eventuală configurație a pieței, chiar și aproape de incertitudine pură, nu îi va genera unele pierderi. Evident că, pentru situațiile când monopolistul tinde să obțină un profit maxim, dar cuantumul regretului să fie minim, se recomandă să fie aplicat criteriul Savage. Acesta se deosebește de cel al pesimistului, deoarece scopul problemei se consideră ca fiind minimizarea regretului, care, indirect, presupune construirea ofertei optime, care să maximizeze profitul pentru toate stările naturii. Paralel cu soluționarea problemei globale, la fiecare iterație, se soluționează și așa-numitele „probleme interne”, care descriu stările naturii considerate, în particular. Această particularitate a algoritmului, grație integrării cu metoda gradientului generalizat, permite construirea unei noi soluții, la fiecare iterație, care să se încadreze în domeniul soluțiilor admisibile, dar are trendul de a se apropia de proxima vecinătate a soluției optime existente. În cazul Savage, rapiditatea generării unei soluții optime depinde de numărul maxim de iterații, dar și de schema automată concretă de modificare a pasului h_k și a pragului de toleranță

Conclusions

Under conditions of uncertainty, the decision maker has to choose any of the existing alternatives, having only some information regarding their profitability. This paper describes the theoretical aspects of the applicability of Wald and Savage criteria, adjusted to the problem of maximizing the profit of the monopolistic producer, with the direct use of the generalized gradient technique. The described algorithms have an iterative character, and their peculiarity consists in the “proximity”, with some approximation, to the vicinity of the optimal solution that is admissible for all the states of nature included in the mathematical model. The algorithm described for the criterion of maximum prudence is characterized by offering a solution which, if subsequently applied, will guarantee the decision maker a certain profit, despite achieving even the most unfavourable state of nature. This approach assures the producer that a possible configuration of the market, even close to pure uncertainty, will not cause loss. Obviously, for situations where the monopolist tends to make a maximum profit, but the amount of regret is minimal, it is recommended to apply the Savage criterion. This is different from that of the pessimist, because the purpose of the problem is the minimization of regret, which, indirectly, implies the construction of the optimal offer that maximizes the profit for all the states of nature. Simultaneously with solving the global problem, with each iteration, the so-called “internal problems”, which describe the states of nature considered, in particular, are also solved. This particularity of the algorithm, thanks to the integration with the generalized gradient method, allows the construction of a new solution, at each iteration, that falls within the field of admissible solutions, but has the tendency to approach the near vicinity of the existing optimal solution. In the Savage case, the speed of generating an optimal solution depends on the maximum number of iterations for which the algorithm will run, but not less important, the autom-

δ_k . Pragul de toleranță reprezintă aproximația, pe care decidentul o poate neglija, dar are rolul de a opri algoritmul, în momentul în care ea nu depășește o anumită valoare definită în prealabil. Acest element al algoritmului contribuie la reducerea timpului de obținere a unui răspuns și diminuarea suprasolicitării subsistemului de calcul, pentru atingerea soluției exacte, care, la momentul determinării, poate să nu mai fie actuală.

atic scheme of modifying the h_k step, and tolerance threshold δ_k . The tolerance threshold represents the approximation that the decision maker can neglect, but it has the role of stopping the algorithm, when it does not exceed a certain predefined value. This element of the algorithm contributes to reducing the response time and the overhead of the computing subsystem, in order to reach the exact solution, which, when determined, may no longer be current.

Bibliografie/ Bibliography:

1. ANDRAȘIU, M. și al. *Metode de decizii multicriteriale*. București: Editura Tehnică, 1986.
2. ANDREICA, M.; STOICA, M.; LUBAN, F. *Metode cantitative în management*. București: Editura Economică, 1998.
3. NICOLESCU, O. *Sistemul decizional al organizației*. București: Editura Economică, 1998, 632 p.
4. STĂNCIOIU, I. *Cercetări operaționale pentru optimizarea deciziilor economice*. București: Editura Economică, 2004, 336 p.
5. ШОР Н. З. *Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения*. Киев: „Наукова Думка", 1979.
6. SAVAGE, L. J. *The Theory of Statistical Decision*. Journal of the American Statistical Association, 1951, vol. 46, No 1, pp. 55-67.
7. ГОДОНОГА, А. Ф.; ГОЛБАН, Л. Л.; ЧУМАКОВ, Б. М. *Некоторые модели принятия решений в условиях неопределености*. *Теория оптимальных решений*, 2018, № 17. Киев: Национальная академия наук Украины, Институт кибернетики, имени В. М. Глушкова, 2018, pag. 130-137, ISSN 2616-5619.
8. GODONOAGĂ, A.; BARACTARI, A. *Modele economice nediferențiabile. Aspecte decizionale*. Chișinău: Editura ASEM, 2011, pp. 52-100.
9. GODONOAGA, A.; GOLBAN, L. *Modification of the Savage's decision criterion for continuous processes*. The 4th Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova, dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997), 28 iunie – 2 iulie 2017, Chisinau, Moldova.
10. GOLBAN, L. *Linear models with uncertainty factors and some aspects of decision making*. The 16th International Conference on Informatics in Economy (IE 2017). Bucharest, Romania 04 – 07 May, 2017.
11. GAMEȚCHI, A.; SOLOMON, D. *Cercetări operaționale*, *Volumul I*. Chișinău: Evrica, 2015, pag. 209-216.
12. GOLBAN, L.; GODONOAGĂ, A. *„O problemă de transport în viziunea Savage"*, Conferința ATIC 2018, „Modelare matematică, optimizare și tehnologii informaționale".
13. GOLBAN, L. *Algorithm for solving the balanced transportation problem for Savage decision criterion*. Conferinţa Ştiinţifică Internaţională „Competitivitatea şi inovarea în economia cunoașterii", ASEM, 28-29 Septembrie 2018, Chișinău.
14. ZABEL, E. *Monopoly and Uncertainty*. The Review of Economic Studies Vol. 37, No. 2 (Apr., 1970), pp. 205-219.
15. APPELBAUM, E.; CHIN, L. *Monopoly versus Competition under Uncertainty*. The Canadian Journal of Economics / Revue Canadienne D'Economique, vol. 15, no. 2, 1982, pp. 355–363, Doi:10.2307/134788.
16. GOLBAN, L. *Modification of Wald and Savage Decision Criteria for Monopoly Market*. Conference Proceedings of the International Conference "The Risk in Contemporary Economy – RCE 2019", 6th – 7th June 2019, XXth Edition, 2019, Galați, Romania, pp. 337-343, print ISSN 2067-0532, online ISSN 2344-5386.